Title	3次元チューリングパターン(第47回生物物理若手の会夏の学校)
Author(s)	太田, 隆夫
Citation	物性研究 (2008), 89(5): 638-640
Issue Date	2008-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/111006
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

3次元チューリングパターン

オーガナイザー：畑　和也
講師：太田隆夫（京大・理）

講師の太田隆夫先生は，生物にも関係の深い非平衡系・非線形系や界面力学など，様々な方面で理論物理学の研究をされていらっしゃいます．

今回の講義では，3次元反応拡散系において生じる特異なパターン（チューリング構造）についてを，理論物理学者としての観点からお話しいただける予定です．生物の現象を理論物理として捉えたときにどう見え，何がわかり，そして何がまだわからないのか．おそらくは非線形微分方程式である反応拡散方程式の解の振る舞いについてのお話しが中心になるかと思いますが，きっと奥の深くそして興味深い内容をお話していただけることと思います．

ちなみに，太田先生には題名の通り「3次元」についてのお話を中心にしていただくことになっていますが，別に予定されている松下貢先生の講義は，この話のいわば「2次元」版の内容である，バクテリアのコロニー形成のお話をしていただける予定です．よろしければそちらも是非ご参加ください．

3次元チューリングパターン

京大理　太田隆夫

私は生物物理の専門家ではないが、日頃見聞きしていることから推察するに、生物物理の研究対象は多彩なようである。理論的観点からしても生態学的数理から免疫系、細胞集団、細胞運動、膜の構造、生体１分子のダイナミクスまでカバーされる。これらすべては物理学的にたいへん興味深いのであるが、ここでは生体系を非平衡系とみたとき、もっとも基本となる概念、いわゆる散逸構造 [1] に関係した研究を取り上げる。

熱平衡から遠く離れた非平衡系で自己組織的に生じる時間的空間的秩序を散逸構造という。この 30-40 年間、多くの研究があるが、その中でも反応拡散系でのチューリング (Turing) 構造はよく知られている。反応拡散系とは化学成分 $\vec{X} = (X_1, X_2, ...)$ に対する次の形の方程式をいう。

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = D\nabla^2 \vec{X} + \vec{f}(\vec{X}) \tag{1}$$

ここに、D は正の成分をもつ対角行列である。関数 $\vec{f}(\vec{X})$ は $\vec{X}$ の多項式である。1952 年にチューリング (Turing) は２変数反応拡散系において拡散係数の比と反応項の非線形性が適当な条件を満たせば一様な定常解は不安定となり、空間的に周期的な時間変化しない解が安定に存在し得ることを示した [2]。その結果現れる周期構造をチューリングパターンという。２変数反応拡散系の具体的な例として、$\vec{X} = (u, v)$ とおき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u\nabla^2 u + u - u^3 - v, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v\nabla^2 v + \gamma(u - \alpha v - \beta), \tag{3}$$

係数 $\alpha, \beta, \gamma, D_u, D_v$ はすべて正である。この方程式は神経軸索上の電位パルス伝搬のモデル方程式である [3]。また、 Belousov-Zhabotinsky 化学反応 [4] の簡単化した方程式でもある。

方程式 (2)、 (3) において $D_u/D_v << 1$ で他の係数が適当な値のとき空間周期解が出現する。空間２次元では縞模様や水玉模様が得られ、動物の紋様などと関係つける研究がある [5]。また、擬２次元的な化学反応の実験で、実際チューリングパターンが観察されている [6]。

３次元空間でのチューリングパターンの研究はそれほど進んでいない。２次元の縞構造は３次元ではサンドイッチ構造になるだろうことは容易に予想できるが、３次元では、1

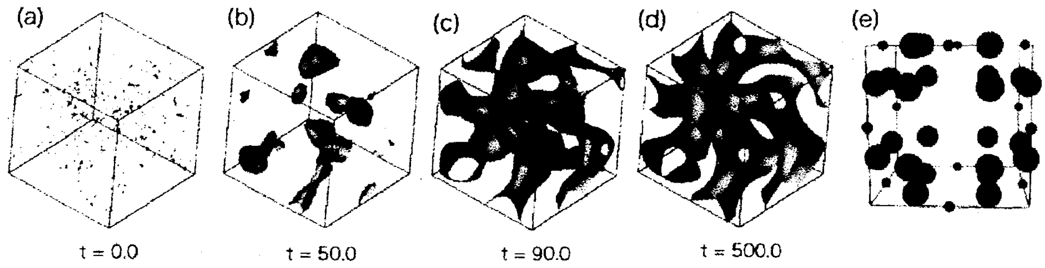

Figure 1: (a)-(d) FitzHugh-Nagumo 方程式におけるジャイロイド構造の形成 [7]。$\beta = 0.04$ (e) Bragg スポット。

次元や 2 次元では存在できない重要な構造があることを指摘しておこう。図は方程式 (2)、(3) を適当なパラメータを選び周期境界条件のもとで、ノイズをかけた一様不安定解を初期条件として解いたときの構造の時間発展である [7]。濃度 u の空間変化が発達し、ジャイロイド構造とよばれる構造が形成されていることがわかる。この構造はいたるところ平均曲率が（ほぼ）ゼロの界面によってつくられる周期構造であり、界面の両側のドメインがそれぞれ空間の端から端までつながっている、いわゆる、共連結構造の一つである。

講義では、共連結構造が反応拡散系の 3 次元パターン形成で、かなり一般的にみられることを数値シミュレーションを示しながら、お話する予定である。

References

[1] 西浦廉政：パターン形成の数理　岩波書店

[2] A. M. Turing: Philos. Trans. R. Soc. London, **Ser. B 237**, (1952) 37.

[3] R. FitzHugh, Biophys. J. **1**, 445 (1961); J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, Proc. IRE **50**, 2061 (1962).

[4] A. N. Zaikin and A. M. Zhabotinsky: Nature, **225** (1970) 535.

[5] S. Kondo and R. Asai, Nature, **376** (1995) 765.

[6] V. Castets et al, Phys. Rev. Lett. **64**, 2953 (1990), Q. Ouyang and H. L. Swinney, Nature **352**, 610 (1991).

[7] H. Shoji, K. Yamada, D. Ueyama and T. Ohta, Phy. Rev. E **75**, 046212 (2007).